№9-дәріс

Математикалық талдауға кіріспе. Нақты сандар жиыны. Функция ұғымы және негізгі қасиеттері. Тізбек шегі және оның қасиеттері. Функция шегі және оның қасиеттері.

Нақты сандар

Рационал сандар деп – $\frac{p}{q}$ түрінде болатын сандарды айтамыз, мұндағы p,q-бүтін сандар ($q \neq 0$). Сонымен бірге, ол шектеусіз периодты ондық бөлшек түрінде берілуі де мүмкін $\left(\frac{2}{3}=0{,}666\ldots\right)$.

Рационал сан болмайтын, шектеусіз периодты емес ондық бөлшек түрінде берілетін$\left(\sqrt{2},\sqrt{3}\right)$ сандар да табылады. Бұндай сандар иррационал сандар деп аталады.

Анықтама. Барлық рационал сандар мен иррационал сандар жиынын нақты (заттық) сандар жиыны деп атаймыз.

Нақты сандарды сандық осьтегі нүктелер арқылы бейнелеуге болады. Нақты сандар жиыны мен сандық осьтің нүктелерінің жиынының арасында өзара-бірмәнді сәйкестік бар, яғни, барлық нақты сандар бүкіл сан осін толық жабады.

Нақты айнымалы функция

Бізге X,Y құр емес жиындары берілсін.

Анықтама: Әрбір $x \in X$ элементіне $y \in Y$ элементі сәйкес келетін сәйкестік X жиынында анықталған, У жиынында мәндері бар функция деп аталады.

Анықтама: Анықталу облысы деп $y \in Y$ мәндері табылатын $x \in X$ мәндер жиынын айтады.

$y=f(x)$ - айқын жарияланған функция;

$F(x)=0$ - функция;

$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$ - параметрлік түрде берілген функция.

$f(-x)=f(x)$ - жұп функция, OY осіне симметриялы,

$f(-x)=-f(x)$ - тақ функция, OX осіне симметриялы,

$f(x+c)=f(x)$ - периодты функция,

$f(x+c)=f(x)$ - периодсыз функция.

Шексіз сандық тізбек және оның шегі.

Анықтама: Кез келген натурал n-ге белгілі бір заңдылықпен x_n саны - тізбектің мүшесі сәйкестендірілсе, сандық тізбек берілген деп айтады. $x_1, x_2, ..., x_n$ немесе $\{x_n\}$, мұндағы n - тізбек мүшесінің нөмірі.

Мысалы: $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ $\qquad \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; ...$

Анықтама: "a" саны $\{x_n\}$ тізбегінің шегі деп аталады, егер $\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, N(\varepsilon) \quad n > N(\varepsilon)$ үшін келесі теңсіздік орындалса $|x_n - a| < \varepsilon$

Белгіленуі: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$

Тізбектің шегі туралы негізгі теоремалар.

Т1. $\{x_n\}$ сандық тізбегінің бірден артық шегі болмайды.

Анықтама: $\{x_n\}$ тізбегі жинақты деп аталады, егер оның шегі ақырлы сан болса.

Егер шегі ∞ - ке тең болса, онда тізбек жинақсыз деп аталады.

Т2. Егер $\{x_n\}, \{b_n\}$ және $\{y_n\}$ жинақты тізбектері үшін $x_n < b_n < y_n$ теңсіздігі орындалса, онда кез келген n үшін шектері келесідей болады.

$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ болса, онда $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$ болады.

Анықтама: $\{x_n\}$ тізбегі шектелген деп аталады, егер кез келген n үшін $|x_n| \le M$ теңсіздігі орындалатындай М саны табылса.

Анықтама: $\{x_n\}$ тізбегі шексіз аз тізбек деп аталады, егер оның шегі нөлге тең болса. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$

Т3. a саны тізбектің шегі болуы болуы үшін $\{x_n - a\}$ тізбегі шексіз аз болуы қажетті және жеткілікті шарт.

Т4. $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ тізбектерінің шегі $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a,$ $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$ болса, онда $\{x_n \pm y_n\}$, $\{x_n \cdot y_n\}$ және $\{\frac{x_n}{y_n}\} b \neq 0$ тізбектерінің шегі сәйкесінше $a \pm b;\ ab;\ \frac{a}{b}$ болады.

$\{\beta_n\}$ тізбегі шексіз үлкен тізбек деп аталады, егер $\forall\, A \quad \exists\, N \quad n > N$ үшін келесі теңсіздік орындалса $|\beta_n| > A$. Белгіленуі: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = \infty$

Т5. Егер $\{\beta_n\}$ тізбегі шексіз үлкен тізбек болса, онда $\{\frac{1}{\beta_n}\}$ тізбегі шексіз аз тізбек.

T6. Егер $\{\alpha_n\}$ тізбегі шексіз аз тізбек болса, $\{\frac{1}{\alpha_n}\}$ тізбегі шексіз үлкен тізбек.

Бұл теоремалардан келесі символдық жазба шығады.

$$\left|\frac{1}{\infty}\right| = 0, \quad \left|\frac{1}{0}\right| = \infty$$

Функцияның шегі.

Анықтама: A саны $x \to x_0$ ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі деп аталады, егер $\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta(\varepsilon)\ \ n > N(\varepsilon)$және $|x - x_0| < \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \varepsilon$ теңсіздігі орындалса.

Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$

$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$ $(x-\delta)(x+\delta)$ аймағы үшін мәндер облысы $f(x) \in O(A-\varepsilon)(A+\varepsilon)$

Функцияның шегі туралы теоремалар.

1. Егер функцияның шегі $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = B, \quad B \neq 0$, онда

$$\lim_{x \to x_0}\left[f(x) \pm \varphi(x)\right] = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} \varphi(x) = A + B$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x)} = \frac{A}{B}$$

2. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \cdot c = c \cdot \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

3. Егер $f(x) = c$ $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = c$

Анықтама: A саны $x \to \infty$ ұмтылғанда $f(x)$ функциясының шегі деп аталады, егер $\forall\, \varepsilon > 0\ \ \exists\, \delta > 0$ және $|x| > \delta$ теңсіздігін қанағаттандыратын барлық x үшін $|f(x) - A| < \delta$ теңсіздігі орындалса.

Белгіленуі: $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$

Шексіз үлкен және шексіз аз шамалар. Шексіз аз шамалардың қасиеттері. Эквивалент функциялар. 1-ші, 2-ші тамаша шектер. Функция үзіліссіздігі. Үзіліс нүктелерінің түрлері.

Шексіз аз және шексіз үлкен функциялар.

Анықтама. $\alpha(x)$ функциясы $x \to a$ ұмтылғанда шексіз кіші (үлкен) деп аталады, егер $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$ $\left[\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = \infty\right]$.

$u(a)$ - a нүктесінің қандай да бір аймағы болсын, $\alpha(x)$ - $x \to a$ ұмтылғандағы шексіз кіші, ал $\beta(x)$ - шексіз үлкен функциялар болсын.

Теоремалар

1. $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$ орындалуы үшін, $f(x)=b+\alpha(x) \quad \forall x\in u(a)$ теңдігінің орындалуы қажетті және жеткілікті.

2. Егер $u(a)$-да $f(x)$ шектелген және $|f(x)|>M>0$ болса, онда

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\alpha(x)}=\infty, \qquad \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0.$$

3. Егер $u(a)$-да $f(x)$ шектелген болса, онда $\lim\limits_{x\to a}[f(x)\cdot\varphi(x)]=0$

$\alpha(x)$ және $\beta(x)$ - $x\to a$ ұмтылғандағы шексіз кіші болсын және $\lim\limits_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=C$ шегі табылсын, онда егер

а) $C\neq 0$ - ақырлы болса, онда α және β - бір ретті шексіз кіші функциялар, ал егер $C=1$ болса, онда α және β - эквивалентті $(\alpha\sim\beta)$ шексіз кіші функциялар.

Е с к е р т у. Шекті есептеу кезінде кез келген шаманы оған эквивалентті шамамен ауыстыруға болады.

б) $C=0$ болса, $\alpha(\mathrm{x})$ $\beta(\mathrm{x})$-ке қарағанда жоғары ретті шексіз кіші функция және оны былай жазамыз: $\alpha=0(\beta)$.

в) $C=\infty$ болса, $\beta(\mathrm{x})$ $\alpha(\mathrm{x})$ -ке қарағанда жоғары ретті шексіз кіші функция.

Шексіз үлкен функциялар осыған ұқсас салыстырылады.

Анықталмағандықтар

$A=B=0$ болған жағдайда, $f(x)$ және $\varphi(x)$функцияларының қалай берілгендігіне байланысты C анықталмаған болуы мүмкін, онда $x\to a$ ұмтылғанда $\frac{f(x)}{\varphi(x)}$ функциясы $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандықты береді .

Негізгі анықталмағандықтар мыналар:

$$\frac{0}{0},\quad \frac{\infty}{\infty},\quad 0\cdot\infty,\quad \infty-\infty,\quad 1^{\infty},\quad 0^{\infty},\quad \infty^{0}.$$

Мысал 1. $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{4}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}\right)$ тап.

$\infty-\infty$ түріндегі анықталмағандықты аламыз. Осы анықталмағандықты ашу үшін жақшаның ішіндегі өрнекті ортақ бөлімге келтіре отырып, мна өрнекті аламыз: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{2-x}{x^2-4}$, яғни, $\frac{0}{0}$ түріндегі анықталмағандыққа келдік. Бұл анықталмағандық бөлшекті $x-2\neq 0$ ортақ көбейткішке қысқарту көмегімен оңай ашылады. Сонымен, берілген шектің мәні $\lim\limits_{x\to 2}\left(-\frac{1}{x+2}\right)=-\frac{1}{4}$

Мысал 2. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}$ тап.

$\frac{\infty}{\infty}$ түріндегі анықталмағандықты аламыз. Бұл анықталмағандықты ашу үшін бөлшектің бөлімін де, алымын да x^3-қа бөлеміз. Онда $\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{2-\frac{1}{x^2}+\frac{5}{x^3}}{1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}}$, бөлімі $x\to\pm\infty$ жағдайда нөлге тең емес болғандықтан, шектер туралы теоремаларды қолдансақ:

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2x^3-x+5}{x^3+x^2-1}=\frac{\lim\limits_{x\to\pm\infty}2-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^2}+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{5}{x^3}}{\lim\limits_{x\to\pm\infty}1+\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x}-\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{1}{x^3}}=2.$$

Тамаша шектер

Практикада жиі кездесетін функциялардың шектеріне тоқталалық. $\alpha(x)$ - қандай да бір функция болсын және

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0 \qquad (1)$$

теңдігі орындалсын.

1. Бірінші тамаша шек $\left(\frac{0}{0}\right)$.

$$\lim_{x\to a}\frac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1 \qquad (2)$$

(2)-ші теңдіктен бірден төмендегі теңдіктерді алуға болады:

$$\lim_{x\to a}\frac{tg\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\arcsin\alpha(x)}{\alpha(x)}=\lim_{x\to a}\frac{arctg\alpha(x)}{\alpha(x)}=1.$$

Ендеше, (1)-ші шарт орындалғандықтан, $\sin\alpha(x)$, $tg\alpha(x)$, $\arcsin\alpha(x)$ және $\alpha(x)$ функциялары - эквивалентті функциялар.

Мысал 3.

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+arctgx}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)$. $\lim\limits_{x\to 0}2x=\lim\limits_{x\to 0}x=0$ болғандықтан, (1)-ші шарт орындалады, онда $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x+arctgx}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x+x}{x}=3.$

б)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\pi+2x)}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\lim_{x\to 0}(\pi+2x)\neq 0\right|=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\left|\lim_{x\to 0}2x=0\right|=-\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x}=-2.$$

2. Екінші тамаша шек $\left(1^\infty\right)$.

$$\lim_{x\to a}\left[1+\alpha(x)\right]^{1/\alpha(x)}=e$$

Үзіліссіз функциялар

R_n-де қандай да бір M_0 нүктесінің маңайында $y=f(M)$ функциясы анықталсын.

Анықтама. Функция $f(M)$ функциясы M_0 нүктесінде үзіліссіз деп аталады, егер

а) M_0 нүктесінде $f(M)$ анықталған болса

б) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M)$ шегі табылса

в) $\lim\limits_{M \to M_0} f(M) = f(M_0)$.

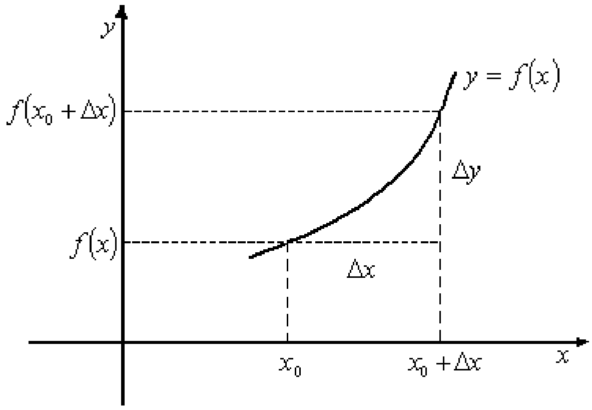
Егер а), б), в) шарттарының тым болмағанда біреуі орындалмаса, онда M_0 нүктесі $y = f(M)$ функциясының үзіліс нүктесі деп аталады.

Бір айнымалы $y = f(x)$ үзіліссіз функцияларының қасиеттерін қарастырамыз.

Егер $f(x)$ функциясы a нүктесінде үзіліссіз болса, онда $f(a-0) = f(a+0) = f(a)$ теңдіктері орындалатындығы анық.

Үзіліссіздіктің тағы бір анықтамасын берелік.

x_0 нүктесінде x айнымалысына Δx өсімшесін береміз.



Онда функция Δy өсімшесін алады, әрі

$$\Delta y = \Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x).$$

Анықтама. $y = f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз деп айтамыз, егер ол осы нүктеде анықталып және $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ теңдігі орындалса.

Мысал 4. $y = x^2$ функциясын кез келген $x_0 \in (-\infty; \infty)$ нүктесінде үзіліссіз екендігін дәлелде.

Шынында да,

$$f(x_0) = x_0^2 \Rightarrow f(x_0 + \Delta x) = f(x_0 + x)^2 \Rightarrow \Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = \Delta x \cdot (2x_0 + \Delta x).$$

Бұдан $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x (2x_0 + \Delta x) = 0$.

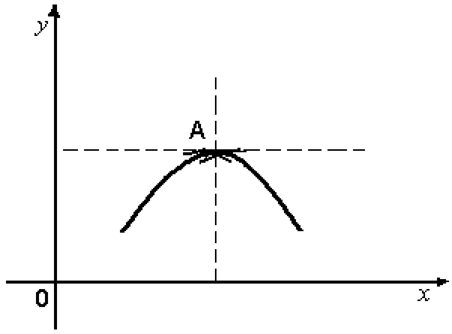
Қасиеттері:

1. Егер $f(x)$ және $\varphi(x)$ функциялары x_0 нүктесінде үзіліссіз болса, онда осы нүктеде $f(x) \pm \varphi(x)$, $f(x) \cdot \varphi(x)$, $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$, $(\varphi(x_0) \neq 0)$ функциялары да үзіліссіз.

2. Егер $y = f(x)$ функциясы $x = a$ нүктесінде үзіліссіз, ал $x = \varphi(t)$ функциясы α нүктесінде үзіліссіз болса, мұндағы $\alpha = \varphi(\alpha)$, онда $y = f(\varphi(t))$ күрделі функциясы $t = \alpha$ нүктесінде үзіліссіз.

Функцияның үзіліс нүктелері

Анықтама . $f(x)$ функциясының үзіліс нүктесі x_0 жөнделінетін үзіліс нүктесі деп аталады, егер $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ шегі болып, бірақ та $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде анықталмаған немесе $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ болса.



Егер $f(x)$ функциясы x_0 нүктесінде жөнделетін үзілісті функция болса, онда ол үзілісті жөндеуге болады. Яғни, $f(x_0)$ анықталмаған, ал $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ болса, онда $f(x_0) = A$ деп алып, $f(x)$ функциясын x_0 нүктесінде үзіліссіз қылып жіберуге болады.

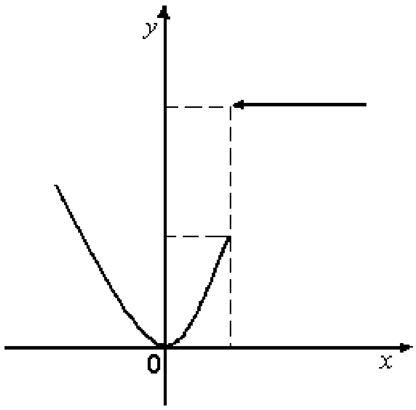
Анықтама. x_0 нүктесі бірінші түрдегі үзіліс нүктесі деп аталады, егер $f(x_0 - 0), f(x_0 + 0)$ табылып, тұрақты санға тең болса және $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$ теңдігі орындалса.

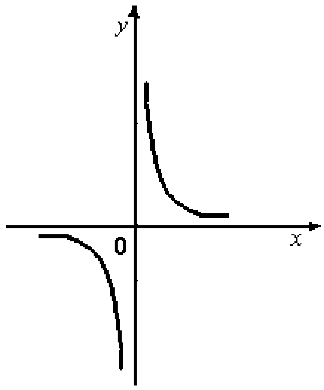
Мысал 5.

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{егер } x \le 1 \\ 2, & \text{егер } x > 1 \end{cases}$$

$$y(1-0) = \lim_{x \to 1-0} y = \lim_{x \to 1-0} x^2 = 1, \quad y(1+0) = \lim_{x \to 1+0} y = \lim_{x \to 1+0} 2 = 2.$$

$x_0 = 1$ нүктесі бірінші түрдегі үзіліс нүктесі, себебі $y(1-0) \neq y(1+0)$.





Басқа үзіліс нүктелерін екінші түрдегі үзіліс нүктесі деп айтамыз.

Кесіндідегі үзіліссіз функциялар

Анықтама . $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде үзіліссіз деп аталады, егер ол $(a;b)$ аралығындағы әрбір нүктеде үзіліссіз болса және $f(a+0)=f(a),\ f(b-0)=f(b)$ теңдігі орындалса.

D облысындағы үзіліссіз функциялардың класын $C(D)$ деп белгілейміз.

Теоремалар.

1. Егер $f(x)\in C[a;b]$, онда $f(x)$ функциясы $[a;b]$ кесіндісінде шектелген.

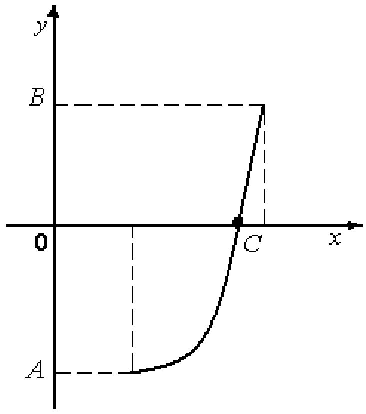
2. Егер $f(x)\in C[a;b]$, онда $f(x)$ функциясы осы кесіндіде тым болмағанда бір рет ең үлкен мән M мен ең кіші мән m қабылдайды, яғни,

$$m\le f(x)\le M \quad \forall x\in[a;b]$$

3. $f(x)\in C[a;b]$ және $f(a)=A,\ f(b)=B$ болсын, әрі $A=B$ болсын.

Онда $\forall\mu:\ \ A\le\mu\le B\ \ \exists x=C$, мұндағы $f(C)=\mu$.

Салдар 1. Егер 3-теоремада $AB<0$, онда $f(C)=0,\ C\in(a;b)$ орындалатындай $\exists C$.



Е с к е р т у. $y=f(x)$ бірайнымалы функцияның шектері (біржақты шектерден басқа) мен үзіліссіздігі туралы теоремалар мен қасиеттер көп айнымалы функциялар үшін де ақиқат.